Solution 2 :

1°/ • Montrons que $\forall x \in [0,1]$, $1+x+\frac{x^2}{2} \leq e^x$

Soit $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$

h est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $h'(x) = e^x - x - 1$

h' est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $h''(x) = e^x - 1 \geq 0$

x	0		1
$h''(x)$		+	
$h'(x)$	0	(+)	
$h(x)$	0	(+)	

D'après le tableau des variations de g, on a :

$\forall x \in [0,1]$, $h(x) \geq 0$ d'où $\forall x \in [0,1]$, $1+x+\frac{x^2}{2} \leq e^x$

• Montrons que $\forall x \in [0,1]$, $e^x \leq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

Pour cela considérons la fonction $k(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

$k'(x) = e^x - 1 - x - x^2$; $k''(x) = e^x - 1 - 2x$; $k^{(3)}(x) = e^x - 2$

on a : $e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$

x	0		$\ln 2$		1
$k^{(3)}(x)$		−	0	+	
$k''(x)$	0	(−)			$e-3$
$k'(x)$	0	(−)			
$k(x)$	0	(−)			

d'après le tableau des variations de k on a :